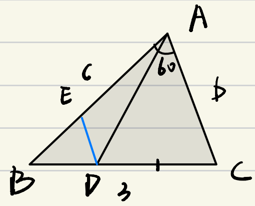
解三角形最值问题

18. 在 ΔABC 中， $A=\frac{\pi}{3}$, $BC=3$, D 为 BC 的一个三等分点，则 AD 的最大值是______.



作三等分点 E

$AE=\frac{2}{3}c$

$\angle AED=120^\circ$.

$\cos 120^\circ = \frac{\frac{4}{9}c^2+\frac{1}{9}b^2-AD^2}{2\cdot\frac{2}{3}c\cdot\frac{1}{3}b} = -\frac{1}{2}$

$\frac{4}{9}c^2+\frac{1}{9}b^2+\frac{2}{9}bc = AD^2 \Rightarrow \frac{4}{9}c^2+\frac{1}{9}b^2+\frac{2}{9}(b^2+c^2-9)$

$=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{3}c^2-2$

$=\frac{1}{3}(b^2+2c^2)-2$

$=\frac{1}{3}[(3\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2+2\cdot12\sin^2\theta]$

麻烦.

在 ΔABC中, $\cos 60^\circ=\frac{b^2+c^2-9}{2bc}=\frac{1}{2}$

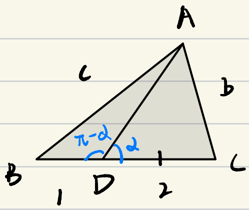
$b^2+c^2=9+bc \Rightarrow bc=b^2+c^2-9$.

完全平方

$\underbrace{\left(b-\frac{c}{2}\right)^2}_{3\cos\theta}+\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2}_{3\sin\theta}=9$.

$$\begin{cases} b=3\cos C+\sqrt{3}\sin C \\ c=2\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$$

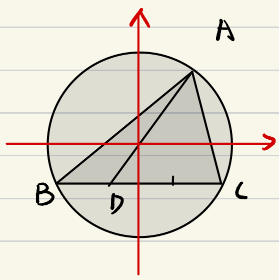
三角换元
求最值



$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{AD^2+4-b^2}{2\cdot AD\cdot 2} \\ \cos(\pi-\alpha) &= \frac{AD^2+1-c^2}{2\cdot AD\cdot 1} \end{aligned}\right\} \text{相加}=0.$$

算出来相同.

画圆法



$\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$

建系. $AD^2=\left(2\sqrt{3}\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$